ПРИЛОЖЕНИЕ 3

УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Раздел 1

1. К условиям (1.4), (1.5) задачи надо добавить ограничение $x \le b$, где b - предельное количество товара в порции.
2. Да.
3. Да.
4. Балансовые соотношения (1.7) - (1.9) должны отражать выполнение заказа на готовую продукцию.
5. Множество планов должно быть не пустым.
6. Оптимальный план не изменится, относительная прибыль увеличится во столько же раз.
7. Относительная прибыль и выход долек, хлопьев и кубиков из тонны картофеля третьего поставщика
8. Таблицу 1.1 надо дополнить соответственно одной или двумя строками с данными о выходе готовой продукции и спросе на нее.
9. Появится дополнительной условие целочисленности неизвестных.
10. Появятся дополнительные неравенства $x_1 \le b_1$, $x_2 \le b_2$, где b_1, b_2 – максимальные количества единиц продукции, которые можно изготовит на 1-м и 2-м заводах.
11. В обозначениях предыдущего упражнения $a \le b_1 + b_2$.
12. Любая математическая модель, в том числе игра «преследование Шерлока Холмса», отражает субъективные представления исследователя операций о моделируемом явлении. Поэтому можно менять с соответствующим обоснованием все оценки выигрышей Шерлока Холмса в разных ситуациях. Следует лишь заботиться об адекватности модели и иметь в виду, что каждый раз мы будем получать новую игру. Один из возможных выходов – задавать оценки выигрышей интервалами.
13. Например, не учитываются возможные сомнения Мориарти о целесообразности преследования Шерлока Холмса.
14. Игра в «орлянку».

15. Можно. Выигрыши Мориарти равны и выигрышам Холмса, взятым со знаком минус.
16. Повлияет только на выигрыши игроков.
17. Класс биматричных игр содержит в себе класс матричных игр. Обратное не верно.
18. Например, различиями в спросе на товар.
19.

$$H_1(x, y) = k_{11}\max\{0, x - y\} + k_{12}\max\{0, y - x\}$$

$$H_2(x, y) = k_{21}\max\{0, y - x\} + k_{22}\max\{0, x - y\}.$$

20.

$$H_1(x, y) = k_{11}(x_1 - y_1) + k_{12}(x_2 - y_2) + k_{13}(x_3 - y_3) \to \max,$$

$$H_2(x, y) = k_{21}(y_1 - x_1) + k_{22}(y_2 - x_2) + k_{23}(y_3 - x_3) \to \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0;$$

x_j, y_j – доли товара, направляемые соответственно компаниями 1, 2 на рынок j, k_{ij} – положительные коэффициенты пропорциональности, $i = 1,2$, $j = 1,2,3$.

21. Аналогично упражнению 20.
22. Игроки 1,2 независимо выбирают точки x, y на отрезке [0,1] соответственно. Первый игрок стремится максимизировать расстояние между этими точками, второй - минимизировать.

Раздел 2

1. Точка минимума

$$x^* = \min\left\{b, \sqrt{\frac{2c_1N}{c_2T}}\right\}.$$

2. Пропорционально изменится минимум целевой функции, точка минимума останется прежней.
3. x^* убывает обратно пропорционально $\sqrt{T}$. $З(x^*)$ растет пропорционально $\sqrt{T}$.
4. Появится дополнительной условие целочисленности неизвестной x.

5. В общем случае нет.
6. Пусть a –наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $a \le x^* < a + 1$. Тогда решением задачи будет число $\operatorname{argmin}\{З(a), З(x^*), З(a + 1)\}$.
7. Для целого положительного x разность $З(x + 1) - З(x)$.
8. Представим формулу (2.3) в виде

$$x^*(T) = \frac{d}{\sqrt{T}} \quad (d = \cdot\sqrt{\frac{2c_1N}{c_2}})$$

и действуем далее по стандартной схеме.

Раздел 3

1. Запишем ограничение (Г) со свободным членом b в виде

$$x_1 + x_2 \le b \qquad (Г_b)$$

Оно будет активным на оптимальном плане $x^* = (4.5, 3)$, если $b = 4.5 + 3 = 7.5$.
2. В обозначениях упражнения 1 при $b < 7.5$ точка с координатами $x_!^* = 4.5$, $x_2^* = 3$ не будет планом задачи. Из геометрических представлений и рис. 3.1 ясно, что при $6 \le b \le 7.5$ на оптимальном плане активны ограничения (Б) и $(Г_b)$, при $0 \le b \le 6$ - ограничения (Д) и $(Г_b)$. Этих соображений достаточно для нахождения оптимального плана и экономических объяснений решения.
3. При малых «шевелениях» одного ограничения (Б) или одного ограничения (В) оптимальный план по-прежнему активен на ограничениях (Б) и (В).
4. Обозначим относительные прибыли, получаемые из 1 *т* картофеля поставщиков 1, 2 через c_1, c_2 соответственно. Тогда линия уровня целевой функции, проходящая через точку (4.5, 3), имеет вид

$$c_1(x_1 - 4.5) + c_2(x_1 - 3) = 0.$$

Для оптимальности плана $x^* = (4.5, 3)$ достаточно потребовать, чтобы линия уровня не пересекала внутренность множества планов *D*. Если перевести это требование в аналитическую форму, получим искомые условия на вектора $c = (c_1, c_2)$. Согласно этим условиям вектора c должны заполнять конус с вершиной в 0, одна образующая которого ортогональна прямой (Б) и другая – прямой (В).

5. Не единственность решения задачи имеет место в том случае, если линия уровня целевой функции параллельна прямой (Б) или (В).
6. Запишем сначала формулы относительной чувствительности координат оптимального плана к малым приращениям Δb_1. Используя (3.12), последовательно имеем

$$x_1^* - 4.5 = -0.25\Delta b_1 + \ldots,$$
$$x_2^* - 3 = 0.5\Delta b_1 + \ldots;$$

$$(x_1^* - 4.5)/4.5 = -0.25/4.5\times 18(\Delta b_1/18) + \ldots,$$
$$(x_2^* - 3)/3 = 0.5/3\times 18(\Delta b_1/18)+ \ldots;$$

$$(x_1^* - 4.5)/4.5 = -0.25/4.5\times 18(\Delta b_1/18) + \ldots,$$
$$(x_2^* - 3)/3 = 0.5/3\times 18(\Delta b_1/18)+ \ldots;$$

$$(x_1^* - 4.5)/4.5 = -0.25/4.5\times 18(\Delta b_1/18) + \ldots = -(\Delta b_1/18) + \ldots,$$
$$(x_2^* - 3)/3 = 0.5/3\times 18(\Delta b_1/18) + \ldots = 3(\Delta b_1/18) + \ldots .$$

Как показывают последние формулы, если Δb_1 меняется на один процент по отношению к номинальному значению ($\Delta b_1/18 = 0.01$), то первая координата оптимального плана уменьшится приблизительно на 1% и вторая координата возрастет приблизительно на 3% по отношению к своим номинальным значениям.
7. Это лучше сделать самостоятельно. Много примеров операций, формализуемых в виде задач линейного программирования, приведено в [1].
8. Используйте геометрическую интерпретацию канонической задачи линейного программирования на плоскости.

Раздел 4

1. Применение необходимого условия экстремума корректно, поскольку функция дифференцируема и ее минимум достигается во внутренней точке области определения.

2. Исследование решения (4.10), (4.11) на чувствительность и относительную чувствительность к исходным данным проводится по стандартной схеме.
3. Новая формулировка задачи

$$C(x_1, x_2) = x_1^2/c_1 + x_2^2/c_2 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 = a, \quad 0 \le x_1 \le b_1, \quad 0 \le x_2 \le b_2,$$

где b_1, b_2 – максимальные количества единиц продукции, которые можно изготовит на 1-м и 2-м заводах. Ограничения задачи совместны при условии $0 \le a \le b_1 + b_2$.

4. При дополнительных ограничениях на производственные мощности заводов аналог преобразования (4.3) будет иметь вид

$$x_1 = s\,, \qquad x_2 = a - s\,, \qquad \max\{0, a - b_2\} \le s \le \min\{a, b_1\},$$

В результате преобразования получим задачу минимизации квадратного трехчлена на заданном отрезке. Необходимые условия экстремума применимы, если точка минимума лежит внутри отрезка.

Раздел 5

1. Исходите из очевидного неравенства

$$\min_j a_{ij} \le \max_i a_{ij} \;.$$

2. Попробуйте доказать самостоятельно. Если будут затруднения, посмотрите ход рассуждений в [3].
3. Элемент матрицы выигрышей, соответствующий седловой точке, минимален в своей строке и максимален в своем столбце. Седловая точка действительно образована оптимальными стратегиями игроков. Это вытекает из упражнения 2.
4. Воспользуйтесь определением седловой точки.
5. Первая и третья матрицы.
6. Это возможно, если $2{\times}2$–матрица с элементами a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} обладает свойством $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \ne 0$.

7. В условиях упражнения 6 можно, если седловая точка преобразованной функции выигрышей находится в единичном квадрате $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$.
8. Воспользуйтесь способом решения, указанным в п.5.4.

Раздел 6

1. В первой из биматричных игр ситуации равновесия (1,1), (2,2).
2. Вторая из биматричных игр в упражнении 1 не имеет ситуации равновесия в чистых стратегиях. Для ее решения в смешанных стратегиях можно воспользоваться указанным в п. 6.3 приемом.
3. Соответственно поменяются стратегии.
4. Не обладают.
5. Ответы утвердительные на все вопросы, поскольку между p и x, q и y есть взаимно однозначное соответствие.

Раздел 7

1. Следует воспользоваться определением оптимальной по Парето точки.
2. $x^* = 1$, $y^* = 0$.
3. Да.
4. Ближайшей к точке D (рис. 7.1) будет 1) общая точка отрезка AB и прямой, проходящей через D параллельно биссектрисе, 2) точка A или B.